

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.4

Аннотация

Условия существования экстремума. Выпуклость функции. Точки перегиба. Схема полного исследования функции.

1 Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если точка c является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум (рис. 1).

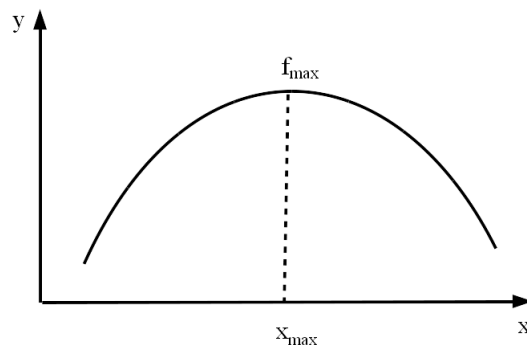


Рис. 1: Гладкий экстремум

Если $f'(c)$ не существует (в частности, $f'(c) = \infty$), то в точке c функция имеет острый экстремум (рис. 2).

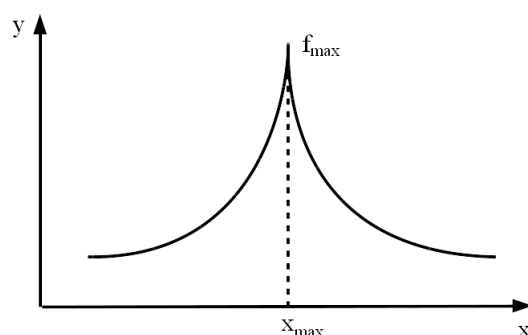


Рис. 2: Острый экстремум

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c , кроме, быть может, самой точки c , в которой она является непрерывной. Тогда если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то точка c является точкой экстремума.

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$, где число ξ лежит на интервале с концами x и c .

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$. $\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$. $\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ - точка локального максимума.

Случай локального минимума рассматривается аналогично. ■

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Если $f''(c) < 0$, то c - точка локального максимума. Если $f''(c) > 0$, то c - точка локального минимума.

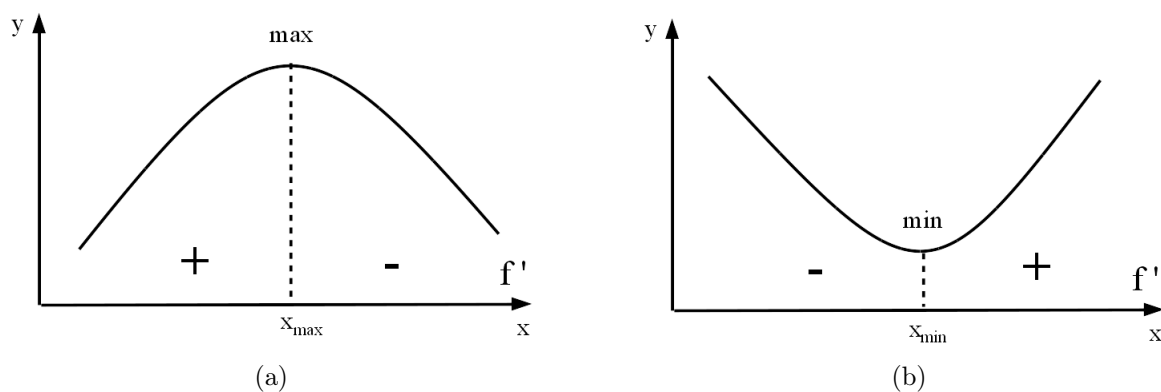


Рис. 3: Точки максимума (a) и минимума (b)

2 Выпуклость функции

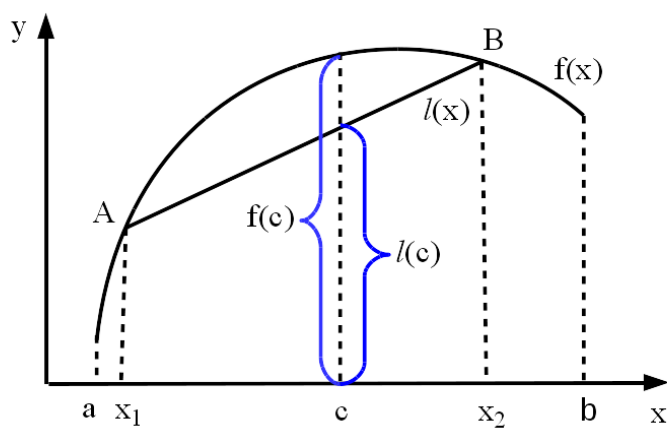


Рис. 4: Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) (см. рис. 4). Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2 . Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением

$$y = l(x),$$

где $x_1 \leq x \leq x_2$ и $l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$.

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c . В данной точке $f(c)$ - это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$, а $l(c)$ - расстояние от оси Ox до отрезка AB .

Определение

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх (вниз)** на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и $\forall c \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $l(c) \leq f(c)$ ($l(c) \geq f(c)$).

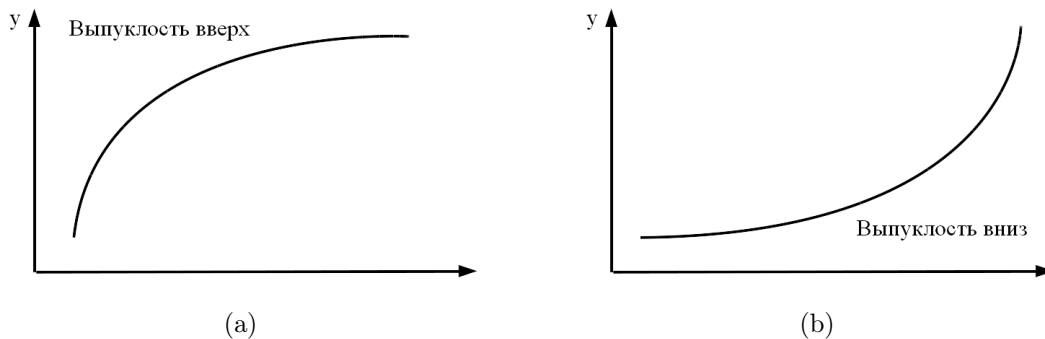


Рис. 5: Примеры функций, выпуклых вверх (a) и вниз (b)

Теорема (достаточное условие выпуклости)*

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $f''(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вверх. Если $f''(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ выпукла вниз.

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.

$$\begin{aligned}
l(x) - f(x) &= \\
&= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\
&= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\
&= |\text{по теореме Лагранжа } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b| = \\
&= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\
&= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\
&= |\text{по теореме Лагранжа } f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b| = \\
&= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.
\end{aligned}$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$.

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) \leq f(x)$. $\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) \geq f(x)$. $\Rightarrow f(x)$ выпукла вниз.



Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$, $L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c . Если $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c , то c называется **точкой перегиба** функции $f(x)$.

Теорема (необходимое условие перегиба)*

Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке c вторую производную $f''(c)$,

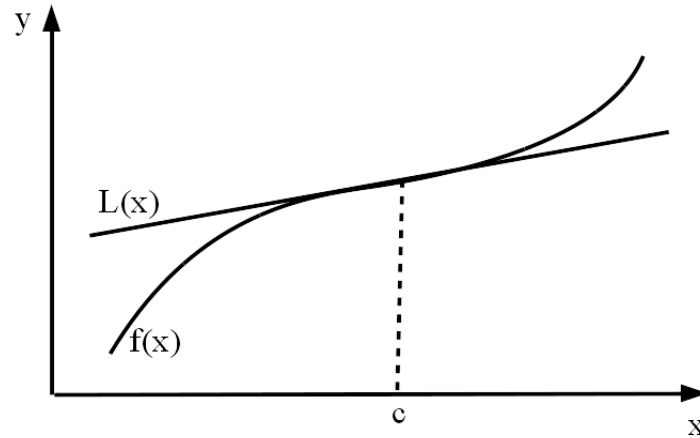


Рис. 6: Поведение функции в окрестности точки перегиба

и $L(x)$ - касательная к графику функции $f(x)$ в точке c :

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2) = \\ &= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + o((x - c)^2).$$

Величина $o((x - c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x - c)^2$ при $x \rightarrow c$.

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) : |\frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2| > |o((x - c)^2)|$ при условии, что $f''(c) \neq 0$.

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c , а значит, c не будет точкой перегиба.

\Rightarrow Если c - точка перегиба, то $f''(c) = 0$. ■

Теорема (достаточное условие перегиба)

Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c - это точка перегиба.

3 Схема полного исследования функции

1. Область определения
2. Нули функции
3. Интервалы знакопостоянства
4. Асимптоты
 - а) вертикальные
 - б) наклонные
5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции
6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз